Two Wheeled balancing Robot

System Dynamics and Simulation

생기원 양광웅 작성

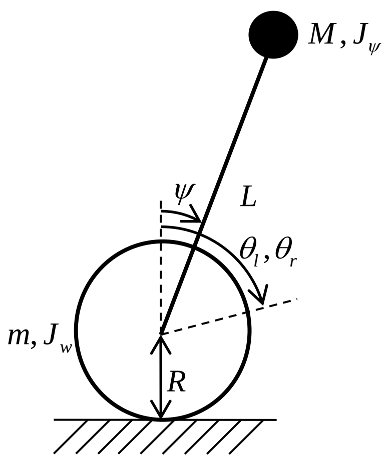
1. 로봇 모델링과 시뮬레이션

1.1. 로봇 모델링

두 바퀴로 구성되는 동적 균형 로봇의 기본 아이디어는 매우 간단하다. 로봇의 상체가 넘어지려는 방향으로 바퀴를 구동하여 중심을 잡는 것으로, 로봇의 무게중심은 바퀴 축 위에 머무르기 때문에 로봇은 균형을 유지하게 된다.

1.1.1. 로봇 동역학

라그랑지 방법을 이용해서 동역학 모델을 구축한다.



θ_l, θ_r: 좌우 바퀴의 각도,

θ: 로봇의 좌우 바퀴의 각도 평균,

ϕ: 로봇의 회전 각도,

ψ: 로봇의 상체가 넘어진 각도,

L : 바퀴 축으로부터 질량중심까지의 높이,

W: 좌우 바퀴간의 거리,

R: 바퀴의 반지름,

m : 바퀴의 질량,

M : 몸체의 질량,

J_w : 바퀴의 관성 모멘트
J_m : 모터의 관성 모멘트
J_ψ : 몸체가 쓰러지는 방향의 관성 모멘트,

<밸런싱 로봇의 동역학적 모델>

라그랑지 방법을 사용하기 위해 라그랑지안을 수립해야 한다. 총 운동에너지의 합에 총 위치에너지의 합을 빼면 된다.

$$L = T_1 + T_2 - U$$

라그랑지 방법을 이용해 운동에너지와 위치에너지를 구해준다. 운동에너지 중에서 병진 운동에너지는

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_l^2 + \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} M v_b^2$$

이다. 첫 번째와 두 번째 항은 좌우 바퀴의 병진운동 에너지이고 세 번째 항은 상체 무게중심의 운동에너지다. v_l, v_r, v_b 는 다음과 같다.

$$v_l = R\dot{\theta}_l,$$
$$v_r = R\dot{\theta}_r,$$
$$v_b = v_\theta + v_\psi + v_\phi.$$

위 식에서 v_b 에는 3가지 성분의 속도 벡터를 포함하고 있다. 첫 번째는 로봇이 이동하는 속도고, 두 번째는 로봇의 상체가 넘어지는 속도며, 마지막으로 로봇이 회전하는 속도다.

$$v_\theta = (R\dot{\theta}\cos\phi,\ R\dot{\theta}\sin\phi,\ 0),$$
$$v_\psi = (L\dot{\psi}\cos\psi\cos\phi,\ L\dot{\psi}\cos\psi\sin\phi,\ -L\dot{\psi}\sin\psi),$$
$$v_\phi = (-L\dot{\phi}\sin\psi\sin\phi,\ L\dot{\phi}\sin\psi\cos\phi,\ 0).$$

또한 운동에너지 중에서 회전 운동에너지는

$$T_2 = \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\eta^2 J_m (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}\eta^2 J_m (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2$$

이다. 첫 번째와 두 번째 항은 좌우 바퀴의 회전 운동에너지고, 세 번째와 네 번째 항은 로봇 상체의 회전 운동에너지이고, 마지막 두 항은 모터의 회전 운동에너지다. (η 은 감속비)

좌우 바퀴와 상체의 위치에너지 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&U = mgh_l + mgh_r + Mgh_b,\\
&h_l = R,\\
&h_r = R,\\
&h_b = R + L\cos\psi
\end{aligned}$$

라그랑지 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
L = &\frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2) + \frac{1}{2}M(R\dot{\theta}\cos\phi + L\dot{\psi}\cos\psi\cos\phi - L\dot{\phi}\sin\psi\sin\phi)^2\\
&+\frac{1}{2}M(R\dot{\theta}\sin\phi + L\dot{\psi}\cos\psi\sin\phi + L\dot{\phi}\sin\psi\cos\phi)^2 + \frac{1}{2}M(-L\dot{\psi}\sin\psi)^2\\
&+\frac{1}{2}J_w(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2) + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\eta^2 J_m(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2) - \eta^2 J_m(\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)\dot{\psi} + \eta^2 J_m\dot{\psi}^2\\
&-2mgR - MgR - MgL\cos\psi
\end{aligned}$$

위 식에서 θ_l, θ_r 을 소거하기 위하여 다음의 관계식을 이용한다.
로봇의 이동거리는 좌우 바퀴의 회전 평균(θ)으로 알 수 있고, 로봇이 향하고 있는 방향은 좌우 바퀴의 회전 차(ϕ)로 계산할 수 있다. θ, ϕ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
(\theta, \phi) &= \left(\frac{1}{2}(\theta_l + \theta_r), \frac{R}{W}(\theta_r - \theta_l)\right)\\
(\dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \left(\frac{1}{2}(\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r), \frac{R}{W}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r = 2\dot{\theta},\\
&\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2 = 2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2}\dot{\phi}^2.
\end{aligned}$$

L을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
L = &mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mW^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}M(R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\dot{\phi}^2\sin^2\psi + 2RL\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi)\\
&+J_w\dot{\theta}^2 + J_w\frac{W^2}{4R^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 + \eta^2 J_m\dot{\theta}^2 + \eta^2 J_m\frac{W^2}{4R^2}\dot{\phi}^2 - 2\eta^2 J_m\dot{\psi}\dot{\theta} + \eta^2 J_m\dot{\psi}^2\\
&-2mgR - MgR - MgL\cos\psi
\end{aligned}$$

위 식으로부터 라그랑지 방정식을 구한다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=T_\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=T_\psi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=T_\phi$$

수식을 전개하면 아래와 같다.

$$T_\theta=\left[(2m+M)R^2+2J_w+2\eta^2 J_m\right]\ddot{\theta}+(MLR\cos\psi-2\eta^2 J_m)\ddot{\psi}-MLR\dot{\psi}^2\sin\psi$$
$$T_\psi=(MLR\cos\psi-2\eta^2 J_m)\ddot{\theta}+(ML^2+J_\psi+2\eta^2 J_m)\ddot{\psi}-MgL\sin\psi-ML^2\dot{\phi}^2\sin\psi\cos\psi$$
$$T_\phi=\left[\frac{1}{2}mW^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}(J_w+\eta^2 J_m)+ML^2\sin^2\psi\right]\ddot{\phi}+2ML^2\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\psi\cos\psi$$

위 식을 $\ddot{\theta},\ddot{\psi},\ddot{\phi}$ 에 대하여 정리하면 아래와 같이 행렬식으로 만들 수 있다.

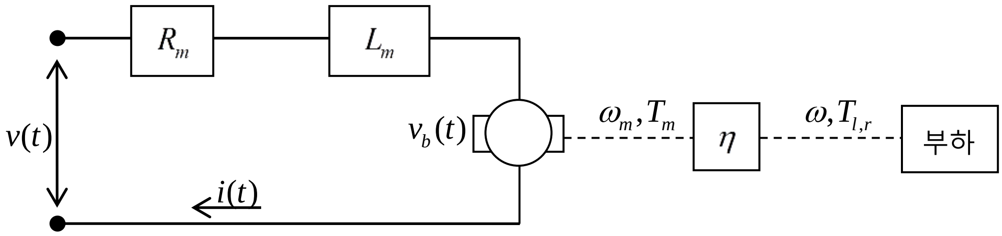
$$T_\theta=\underbrace{\left[(2m+M)R^2+2J_w+2\eta^2 J_m\right]}_{=a}\ddot{\theta}+\underbrace{(MLR\cos\psi-2\eta^2 J_m)}_{=b}\ddot{\psi}\underbrace{-MLR\dot{\psi}^2\sin\psi}_{=e}$$
$$T_\psi=\underbrace{(MLR\cos\psi-2\eta^2 J_m)}_{=c}\ddot{\theta}+\underbrace{(ML^2+J_\psi+2\eta^2 J_m)}_{=d}\ddot{\psi}\underbrace{-MgL\sin\psi-ML^2\dot{\phi}^2\sin\psi\cos\psi}_{=f}$$
$$T_\phi=\underbrace{\left[\frac{1}{2}mW^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}(J_w+\eta^2 J_m)+ML^2\sin^2\psi\right]}_{=g}\ddot{\phi}\underbrace{+2ML^2\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\psi\cos\psi}_{=h}$$

$$\begin{bmatrix} T_\theta \\ T_\psi \\ T_\phi \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{A}}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\left(\begin{bmatrix} T_\theta \\ T_\psi \\ T_\phi \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} e \\ f \\ h \end{bmatrix}\right)$$

1.1.2. 모터 동역학

로봇을 제어하기 위하여 좌우 바퀴에 장착된 모터를 구동하여 로봇에 힘을 인가하게 되는데, 일반적인 DC 모터의 회로에 대한 방정식은 다음과 같다.



$$v(t) = L_m \frac{di(t)}{dt} + R_m i(t) + v_b(t)$$

$v(t)$: 모터 양단에 인가한 전압
R_m : 모터 코일의 저항
L_m : 모터 코일 인덕턴스
$v_b(t)$: 역기전력
$i(t)$: 모터 코일에 흐르는 전류
T_m : 모터에서 발생하는 토크
K_t : 토크 상수
ω_m : 모터 회전자 각속도
K_b : 역기전력 상수
η : 기어비
f_m : 바퀴 축의 점성마찰계수

모터에서 발생하는 토크(T_m)는 흐르는 전류에 비례하고, 역기전력($v_b(t)$)은 회전속도에 비례한다.

$$T_m = K_t i(t)$$
$$v_b(t) = K_b \omega_m$$

보통 모터 내부 인덕터스는 아주 작다고 보기 때문에 $L_m = 0$ 으로 두고 모터토크(T_m)에 대하여 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$T_m = K_t i(t) = K_t \frac{v(t) - K_b \omega_m}{R_m}$$

감속비가 (1:η)인 감속기를 거친 오른쪽과 왼쪽 바퀴의 토크($T_{l,r}$)와 각속도(ω)는 다음과 같은 관계식이 있다.

$$T_{l,r} + f_m\omega = \eta T_m .$$
$$\omega = \frac{1}{\eta}\omega_m .$$

여기서 $\omega = \dot{\theta}_{l,r} - \dot{\psi}$ 이다. 오른쪽과 왼쪽 바퀴의 모터에 전압($v_{l,r}$)이 가해질 때, 오른쪽과 왼쪽 바퀴에 가해지는 토크($T_{l,r}$)에 대하여 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{l,r} &= \eta K_t \frac{v_{l,r} - K_b\eta(\dot{\theta}_{l,r} - \dot{\psi})}{R_m} - f_m(\dot{\theta}_{l,r} - \dot{\psi}) \\ &= \frac{\eta K_t}{R_m} v_{l,r} - \left(\frac{\eta^2 K_t K_b}{R_m} + f_m \right)(\dot{\theta}_{l,r} - \dot{\psi}) \end{aligned}$$

최종적으로, θ, ψ, ϕ 의 토크식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_\theta &= T_l + T_r = \frac{\eta K_t}{R_m}(v_l + v_r) - 2\left(\frac{\eta^2 K_t K_b}{R_m} + f_m \right)(\dot{\theta} - \dot{\psi}), \\ T_\psi &= -T_l - T_r = -\frac{\eta K_t}{R_m}(v_l + v_r) + 2\left(\frac{\eta^2 K_t K_b}{R_m} + f_m \right)(\dot{\theta} - \dot{\psi}), \\ T_\phi &= \frac{W}{2R}(T_r - T_l) = \frac{W}{2R}\frac{\eta K_t}{R_m}(v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2}\left(\frac{\eta^2 K_t K_b}{R_m} + f_m \right)\dot{\phi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\theta &= \alpha u_1 - 2\beta(\dot{\theta} - \dot{\psi}), \\ T_\psi &= -\alpha u_1 + 2\beta(\dot{\theta} - \dot{\psi}), \\ T_\phi &= \frac{W}{2R}\alpha u_2 - \frac{W^2}{2R^2}\beta\dot{\phi}. \end{aligned}$$

여기서 $u_1 = v_l + v_r$, $u_2 = v_r - v_l$ 이고 α, β 는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha \triangleq \frac{\eta K_t}{R_m},$$
$$\beta \triangleq \frac{\eta^2 K_t K_b}{R_m} + f_m .$$